Rotaciones en $\mathbb{R}^2$ por múltiplos de 90º: Su expresión como combinación de reflexiones simples

Mariano M. Chouza

Julio 2007

1 Introducción

En este trabajo se mostrará como las rotaciones efectuadas por múltiplos de 90° pueden expresarse como una combinación de reflexiones de solo 2 clases: horizontal y diagonal. Este resultado es aplicable a la rotación de bitmaps por dicha serie de ángulos.

2 Grupo de las rotaciones por múltiplos de 90°

En primer lugar, probaremos que las rotaciones en $\mathbb{R}^2$ constituyen un grupo abeliano (SO(2)).

Teorema 1 *Sean A y B dos elementos cualesquiera de* SO(2)*. Entonces $AB = BA$.*

Prueba Como sabemos que A y B son elementos de SO(2), podemos escribirlos de la siguiente forma:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$B = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Entonces podemos ver que el producto, AB

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} && (3)\\
&= \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta & -\cos\phi\sin\theta - \sin\phi\cos\theta \\ \sin\phi\cos\theta + \cos\phi\sin\theta & -\sin\phi\sin\theta + \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} && (4)\\
&= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi & -\cos\theta\sin\phi - \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta\sin\phi + \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix} && (5)\\
&= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} && (6)\\
&= BA, && (7)
\end{aligned}$$

que es lo que buscábamos demostrar[1]. ∎

Dentro de SO(2), las rotaciones múltiplos de 90° serán el subgrupo cíclico generado por

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

a la que llamaremos R. Por lo tanto sabemos que será isomorfo a ${C_n}^2$, así que solo resta averiguar el valor de n. Para determinarlo, veamos cual es la forma de R^2:

$$\begin{aligned} R^2 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} && (8) \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} && (9) \\ &= -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} && (10) \\ &= -I. && (11) \end{aligned}$$

Esto nos indica que $R^3 = R^2R = R(-I) = -R$ y que $R^4 = R^2R^2 = (-I)(-I) = I$. Por lo tanto, $R^3R = I$ y $R^3 = R^{-1}$. El grupo completo tiene, por consiguiente, los elementos: R, $-R$, I y $-I$, siendo isomorfo a ${C_4}^3$.

3 Grupo generado por la reflexión horizontal y la reflexión diagonal

Denominemos a la matriz asociada con reflexión horizontal como H y a la asociada con la reflexión diagonal[4] como T. Las matrices serán entonces:

$$\begin{aligned} H &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} && (12) \\ T &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. && (13) \end{aligned}$$

Podemos observar que ambas matrices son sus propias inversas o sea son raíces cuadradas de la identidad. Estudiemos los productos entre ambas matrices:

[1] Otra forma de demostrar este hecho es observar el isomorfismo entre SO(2) y los números complejos de módulo unitario, el grupo U(1).

[2] De hecho, en muchos casos se define C_n como el grupo generado por $1/n$ de una rotación completa. Lógicamente, no seguiremos este camino; definiremos C_n como el grupo generado por un único elemento a tal que $a^n = e$ y $\forall i \in (0, n) : a^i \neq e$.

[3] Este hecho también podría haberse demostrado valiéndose del isomorfismo con U(1) mencionado, identificando R con i.

[4] Podemos observar que la reflexión diagonal es equivalente a intercambiar las coordenadas.

$$
\begin{aligned}
HT &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} && (14)\\
&= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, && (15)\\
TH &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} && (16)\\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} && (17)\\
&= -HT. && (18)
\end{aligned}
$$

Vemos entonces que HT es igual a la matriz R que analizamos en la sección anterior. Comprobemos que tenemos todo el grupo generado por H y T armando la tabla de multiplicación del grupo para comprobar que se hallaron todos los elementos:

	I	$-I$	H	T	R	$-R$	$-H$	$-T$
I	I	$-I$	H	T	R	$-R$	$-H$	$-T$
$-I$	$-I$	I	$-H$	$-T$	$-R$	R	H	T
H	H	$-H$	I	R	T	$-T$	$-I$	$-R$
T	T	$-T$	$-R$	I	$-H$	H	R	$-I$
R	R	$-R$	$-T$	H	$-I$	I	T	$-H$
$-R$	$-R$	R	T	$-H$	I	$-I$	$-T$	H
$-H$	$-H$	H	$-I$	$-R$	$-T$	T	I	R
$-T$	$-T$	T	R	$-I$	H	$-H$	$-R$	I

Vemos entonces que es cerrado, por lo que sabemos que se trata de un grupo de 8 elementos. Siendo no abeliano, ya que $HT \neq TH$, sabemos que solo puede tratarse de D_4 o de Q_8. Pero Q_8 tiene 6 elementos tales que su cuadrado es distinto de la identidad, mientras que este grupo tiene solo uno. Pos lo tanto se trata de D_4.

4 Formas de expresar las rotaciones

Veamos entonces como podemos obtener las rotaciones:

90° antihorarios. Corresponde a R, de modo que podemos obtenerla, según lo visto anteriormente, aplicando T (reflexión diagonal) seguida por H (reflexión horizontal)[5].

180° (no importa el sentido). Corresponde a $R^2 = -I = HTHT$, equivalente a aplicar dos veces la transformación anterior.

[5]Recordemos que las matrices actúan hacia la derecha.

270° antihorarios (90° horarios). No hace falta iterar tres veces la transformación correspondiente a 90°, sino que basta con aplicar el hecho de que $TH = -HT = -R$. O sea, aplicar primero una reflexión horizontal y luego una diagonal.

5 Implementación aplicada a bitmaps

A completar... Tener en cuenta el sistema de coordenadas propio de los bitmaps.